

Induktion och rekursion

Mette Singsby

I avsnitt 1.1 införde vi begreppet *induktion* i den betydelse som det allmänt har i alla sorters vetenskaper. I matematiken används det framför allt i en mer speciell betydelse, vilket ibland markeras genom att man talar om *matematisk* induktion. Vi kommer till detta i avsnitt 4.2. Först gör vi en liten utveckling.

4.1 Summa- och produkttecken 66-68, Övningsarna 4.11 & 4.12 (även sist i avsnitt 4.1)

Vi skall införa ett kompakt sätt att skriva summor och produkter. Låt a_1, a_2, \dots, a_n vara n stycken tal. Deras summa tecknar vi

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Uttrycket i vänsterledet brukar utläsas "summan av a_k , då k går från 1 till n ". Den bokstav (här k), som används för att numrera termerna i summan, kallas *summationsindex*; i formeln (1) har vi alltså använt k för detta syfte, men man kan utnyttja vilken som helst "ledig" bokstav:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{p=0}^{n-1} a_{p+1} = \sum_{v=53}^{n+52} a_{v-52}$$

Några mer konkreta exempel:

$$\sum_{k=2}^4 \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad \sum_{n=6}^{10} n = 6 + 7 + 8 + 9 + 10,$$

$$\sum_{j=1}^5 x^j = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5.$$

Summationsindex är ett exempel på en "internvariabel" eller "blindvariabel" (eng. *dummy variable*). Den har så att säga ingen tillvaro utanför summasymbolen. (Jämför s. k. loopvariabler i programmeringsspråk som BASIC, Fortran, Pascal osv.)

För *produkter* förekommer ett analogt skrivsätt, där man använder den grekiska bokstaven (stora) Π :

$$\prod_{n=1}^N a_n = a_1 a_2 \dots a_N$$

Blandade övningar

320. Vi säger att två mängder A och B har *samma mäktighet* om det finns en bijektion från A till B . Visa att relationen "har samma mäktighet" är en ekvivalensrelation mellan mängder.
321. Visa att $a^5 - a \equiv 0 \pmod{5}$ för alla heltal a .
322. Låt k vara ett positivt heltal. Visa att $4k+3$ inte kan vara kvadrat på ett heltal.
323. Visa att $3^{2n+1} + 5^{2n}$ är delbart med 4 men inte med 8, då n är ett naturligt tal.
324. Visa att $8 \mid 7^{2n+1} + 17^n$ för $n \geq 0$.
325. a) Har kongruensen $x^2 \equiv 3 \pmod{7}$ någon lösning?
b) Har den diofantiska ekvationen $x^2 - 14y^2 = 17$ någon lösning?
326. Är relationen P på de naturliga talen en ekvivalensrelation, om $xPy \Leftrightarrow x+y$ är primtal?
327. S är en relation på \mathbb{R}^2 , definierad genom $(a_1, b_1) S (a_2, b_2)$ om det existerar två rationella tal r_1 och r_2 sådana att $a_1 - a_2 = r_1$ och $b_1 - b_2 = r_2$. Undersök om S är en ekvivalensrelation, och ange i så fall någon ekvivalensklass.
328. En relation R på \mathbb{R} definieras av att aRb om det finns ett heltal m och ett naturligt tal n så att
- $$a = b + m \cdot 2^{-n}$$
- Är R en ekvivalensrelation?
329. En relation S på mängden $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ = mängden av positiva heltal definieras genom att $aSb \Leftrightarrow ab = \text{kvadraten på ett heltal}$. Visa att S är en ekvivalensrelation! Ange två ekvivalensklasser!

Exempelvis gäller

$$\prod_{k=1}^4 (1+k^2) = (1+1^2)(1+2^2)(1+3^2)(1+4^2) = \\ = 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 17 = 1700,$$

$$\prod_{s=0}^5 \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{6}{26} = \frac{18}{1105},$$

$$\prod_{p=1}^n p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Det sista uttrycket, produkten av de n första positiva heltalen, har fått en särskild beteckning: man skriver $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ och utläser det som " n fakultet" eller "fakultet n ".

Ibland visar det sig naturligt att tala om "summor utan termer" resp. "produkter utan faktorer" - s. k. *tomma* summor resp. produkter. En tom summa är t. ex. något sådant som $\sum_{k=1}^0 a_k$. Den brukar konventionellt anses ha värdet 0, medan en tom produkt har värdet 1. Speciellt brukar man sätta $0! = \prod_{k=1}^0 k = 1$.

4.1.1 ÖVNINGAR (67)

Läses sist i 4.1

401. Skriv ut termerna och beräkna följande summor:

a) $\sum_{k=-2}^3 (k^2 + k)$

b) $\sum_{k=0}^4 2^k$

402. Skriv ut faktorerna och beräkna följande produkter:

a) $\prod_{r=8}^{11} \frac{r-1}{r+3}$

b) $\prod_{\mu=-3}^{14} \mu$

403. Vad bör menas med $\sum_{k=3}^3 a_k$ respektive $\prod_{j=7}^7 p_j$?

404. Försök *motivera* varför det är lämpligt att ge en tom summa värdet noll och en tom produkt värdet ett!

405. Beräkna a) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$, b) $\prod_{t=1}^n \frac{t+1}{t}$. □

En *aritmetisk serie* är en summa av typen $\sum_{k=0}^n (ak+b)$, där a , b och

n är givna tal. Det som karakteriserar en aritmetisk serie är att differensen mellan två konsekutiva (dvs. på varandra följande) termer är

konstant (= a). Exempel på aritmetiska serier är

$$\begin{aligned} (1) \quad & 1 + 2 + 3 + \dots + n && (\alpha = 1) \\ & 7 + 10 + 13 + 16 + 19 && (\alpha = 3) \\ & 45 + 25 + 5 - 15 - 35 && (\alpha = -20) \end{aligned}$$

Vi skall bestämma en formel för summan av en aritmetisk serie, och vi börjar med den speciella serien (1):

$$s_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

Skriv upp samma summa två gånger under varandra, men andra gången med termerna i omvänd ordningsföljd:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ s_n &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \end{aligned}$$

Addera sedan term för term:

$$2s_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$

Summan i högerledet här innehåller n stycken termer, vardera med värdet $n+1$. Iydligen gäller alltså $2s_n = n(n+1)$, dvs.

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Denna formel kan i ord uttryckas så: *summan är lika med medelvärdet av första och sista termen, multiplicerat med antalet termer.* Den kursiverade regeln gäller faktiskt allmänt för godtyckliga aritmetiska serier. (Däremot gäller den naturligtvis inte för vilka summor som helst.)

↙ se förs 4.1.1 s 67, sedan 4.1.2 nedan.

4.1.2 ÖVNINGAR (68)

406. Visa resultatet om summan av en godtycklig aritmetisk serie, dvs.

$$\begin{aligned} & \text{att } b + (b+a) + (b+2a) + \dots + (b+(n-1)a) = \\ & = n \frac{b + (b+(n-1)a)}{2} = n \left(b + \frac{n-1}{2} a \right) \end{aligned}$$

407. Övertyga dig om giltigheten av följande *räkner regler* för summasymbolen:

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k,$$

$$\sum_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^n a_k,$$

$$\sum_{k=m}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^n a_k + \mu \sum_{k=m}^n b_k$$